Roll No. ....

DD–2758

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part III) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper First

(Analysis)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक इकाई से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1\. (अ) दर्शाइये कि निम्नलिखित श्रेणी अभिसरित होती है :

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Show that the following series is convergent :

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(ब) दर्शाइये कि निम्नलिखित फलन (0, 0) पर संतत तो है पर अवकलनीय नहीं है :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Show that the following function is continuous but not differentiable at (0, 0) :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(स) अन्तराल $(-\pi,\pi)$ में फलन $f(x)=x+x^2$ की फूरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए।

Find Fourier series of $f(x)=x+x^2$ in internal $(-\pi,\pi)$.

इकाई—2

(UNIT—2)

2\. (अ) यदि $f,[0,1]$ पर $f(x)=x$ द्वारा परिभाषित है, तो दर्शाइये कि $f\in R[0,1]$ तथा $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$ ।

If f is defined by $f(x)=x$ in $[0,1]$, then show that $f\in R[0,1]$ and $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

(ब) समाकल $\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx$ का अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिये, जहाँ m और n धनात्मक पूर्णांक हैं।

Test the convergence of $\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx$, where m and n are positive integers.

(स) यदि $f(x,t)$ सभी $x \ge a$ और $t \in \mathrm{I}$ के लिए संतत है तथा $\phi(x)$, $[a,\xi]$ पर सभी $\xi \ge a$ के लिए परिबद्ध और समाकलनीय है तथा $\mathrm{F}(t) = \int_a^\infty f(x,t)\phi(x)\,dx$, I पर एकसमान अभिसरित होता है, तब सिद्ध कीजिए कि $\mathrm{F}(t)$, I पर संतत है।

If $f(x,t)$ is continuous for all $x \ge a$ and $t \in \mathrm{I}$ and $\phi(x)$ is bounded and integrable for all $\xi \ge a$ in $[a,\xi]$ and F $(t) = \int_a^\infty f(x,t)\phi(x)\,dx$ is uniformly convergent in I, then prove that $f(t)$ is continuous in I.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) दो बिन्दुओं z_1 तथा z_2 को मिलाने वाली एक सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of a straight line joining two points z_1 and z_2.

(ब) दर्शाइये कि फलन $u = x^3 - 3xy^2$ हार्मोनिक है तथा संगत विश्लेषिक फलन को ज्ञात कीजिए जिसका कि यह वास्तविक भाग है।

Show that the function $u = x^3 - 3xy^2$ is harmonic and find corresponding analytic function with u as its real part.

(स) उस मोबियस रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए जो 0, 1 और ∞ को क्रमशः $+1$, i और -1 में प्रतिचित्रित करता है।

Find Mobius transformation which maps points 0, 1 and ∞ to + 1, i and – 1 respectively.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सिद्ध कीजिये कि किसी दूरीक समष्टि में, प्रत्येक विवृत गोलक एक विवृत समुच्चय होता है।

Prove that every open sphere is an open set in a metric space.

(ब) यदि $x, y, z \in \mathrm{R}$, तो निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

(i) $|x - z| \le |x - y| + |y - z|$

(ii) $||x| - |y|| \le |x - y|$

If $x, y, z \in \mathrm{R}$, then prove the following :

(i) $|x - z| \le |x - y| + |y - z|$

(ii) $||x| - |y|| \le |x - y|$

(स) सिद्ध कीजिये कि $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है।

Prove that $\sqrt{2}$ is not a rational number.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक गणनीय सघन दूरीक समष्टि द्वितीय गणनीय होता है।

Prove that every countable dense metric space is second countable.

(ब) मान लीजिए (X, d) तथा (Y, ρ) दो दरीक समष्टियाँ हैं तथा $f : X \to Y$ एक संतत फलन है। यदि $A \subseteq X$, X में संहत है, तब सिद्ध कीजिये कि $f(A), Y$ में संहत है।

Let (X, d) and (Y, ρ) be two metric spaces and $f : X \to Y$ is a continuous function. If $A \subseteq X$ is compact in X, then prove that $f(A)$ is compact in Y.

(स) मान लीजिए $X = (0,1)$ और मान लीजिए d, X पर साधारण दूरीक है। एक फलन $f : X \to X$ परिभाषित है $f(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा। दर्शाइये कि f संतत है किन्तु एकसमान संतत नहीं है।

Let X = (0, 1) and d is a usual metric. A function $f : X \to X$ is defined by $f(x) = \frac{1}{x}$. Show that f is continuous but not uniformly continuous.