

CD-2650

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part I) EXAMINATION, 2020

(Old Course)

MATHEMATICS

Paper Third

(Vector Analysis and Geometry)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any two parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) सिद्ध कीजिए कि :

$$(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]}$$

(A-58) P. T. O.

Prove that :

$$(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]}$$

(ब) यदि \hat{r} सदिश \vec{r} की दिशा में इकाई सदिश हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\hat{r} \times d\hat{r} = \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^2}$$

If \hat{r} is unit vector in the direction of \vec{r} , then prove that :

$$\hat{r} \times d\hat{r} = \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^2}$$

(स) आघूर्णी सदिश की परिभाषा दीजिए। अचरों a, b, c का मान ज्ञात कीजिए, यदि :

$$\vec{F} = (x + 2y + az)\hat{i} + (bx - 3y - z)\hat{j} + (4x + cy + 2z)\hat{k}$$

आघूर्णी है।

Define irrotational vector. Find the value of the constants a, b, c , if :

$$\vec{F} = (x + 2y + az)\hat{i} + (bx - 3y - z)\hat{j} + (4x + cy + 2z)\hat{k}$$

is irrotational.

(A-58)

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध किसी सदिश \vec{r} की दिशा अचर है, यह है कि :

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0}$$

The necessary and sufficient condition is that the direction of vector \vec{r} is constant :

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0}$$

- (ब) सिद्ध कीजिए कि :

$$\iint_S (ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}) \cdot \hat{n} dS = \frac{4}{3}\pi(a + b + c)$$

जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का पृष्ठ है।

Prove that :

$$\iint_S (ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}) \cdot \hat{n} dS = \frac{4}{3}\pi(a + b + c)$$

where S is surface of sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- (स) $\int_C (xy + y^2) dx + x^2 dy$ के लिए समतल में ग्रीन प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जहाँ C, $y = x$ और $y = x^2$ द्वारा परिभाषित क्षेत्र की परिसीमा है।

Verify Green's theorem for :

$$\int_C (xy + y^2) dx + x^2 dy$$

in the plane, where C is boundary of the area described by $y = x$ and $y = x^2$.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि वृत्त :

$$x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$$

तथा $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$

एक-दूसरे को स्पर्श करेंगे यदि :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$$

Prove that the circles :

$$x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$$

and $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$

will touch to each other if :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$$

- (ब) यदि दो संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केन्द्रताएँ e_1 तथा e_2 हैं, तब दर्शाएँ कि :

$$\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$$

If e_1 and e_2 are eccentricities of two conjugate hyperbolas, then show that :

$$\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1.$$

(स) शांकव :

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0.$$

का अनुरेखण कीजिए।

Trace the conic :

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) बिन्दु $(-1, 3, 2)$ से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो समतल $x + 2y + 2z = 5$ तथा $3x + 3y + 2z = 8$ के लम्बवत् हो।

Find the equation of that plane which passes to the point $(-1, 3, 2)$ and perpendicular to the plane $x + 2y + 2z = 5$ and $3x + 3y + 2z = 8$.

(ब) सिद्ध कीजिए कि समतल :

$$2x - 2y + z + 12 = 0$$

गोले :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$$

को स्पर्श करता है। स्पर्श बिन्दु ज्ञात कीजिए।

Prove that the plane :

$$2x - 2y + z + 12 = 0$$

touches the sphere :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0.$$

Find the contact point.

- (स) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) है और आधार वक्र $z^2 = 4ax, y = 0$ है।

Find the equation of that cone whose vertex is (α, β, γ) and base curve is $z^2 = 4ax, y = 0$.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) परवलयज :

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = z$$

के बिन्दु $(4, 3, 5)$ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of normal of the paraboloid :

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = z$$

at the point $(4, 3, 5)$.

- (ब) दीर्घवृत्त :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

का समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

द्वारा प्रतिच्छेद का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of ellipsoid :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

which is intersected by the plane :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

(स) अतिपरवलय :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

के बिन्दु $(2, 3, -4)$ से जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of generators of hyperbola :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

at the point $(2, 3, -4)$.